Aufgabe 1

(a) 4P

$$(A \mid \underline{b}) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 3 & 9 & 0 & 2 \\ 7 & 0 & 3 & 9 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & t \\ -7 & -1 & 3 & 7 & -1 & 4 \end{array}\right) \quad -$$

← Dieser Schritt ist streng genommen nicht nötig, vereinfacht aber das System (mehr Nullen)

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 3 & 9 & 0 & 2 \\ 7 & 0 & 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & t \\ -7 & -1 & 3 & 7 & -1 & 4 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 7 & 0 & 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & 9 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & t \\ -7 & -1 & 3 & 7 & -1 & 4 \end{array}\right) \quad +$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 7 & 0 & 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & 9 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & t \\ 0 & -1 & 3 & 7 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 7 & 0 & 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & -1 & 3 & 7 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & t \\ 0 & 0 & 3 & 9 & 0 & 2 \end{array}\right) \quad -3$$

$$(A' \mid \underline{b}') = \left(\begin{array}{ccccc|c} 7 & 0 & 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & -1 & 3 & 7 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2-3t \end{array}\right)$$

(b) Aus der letzten Zeile von A' lässt sich ablesen:

(1P)

$$\mathcal{L}(A'|\underline{b}') \neq \emptyset \iff 2-3t = 0$$
$$\iff t = -2/3 .$$

(c) Wegen (b) wählen wir im Folgenden $t = -2/3$ und die Nullzeile streichen.

(5P)

Ich bringe A' auf Zeilennormalform:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 7 & 0 & 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & -1 & 3 & 7 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 2/3 \end{array}\right) \begin{array}{l} |\cdot \frac{1}{7} \\ |\cdot(-1) \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1/7 & -5/7 \\ 0 & 1 & -3 & -7 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 2/3 \end{array}\right) +3$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1/7 & -5/7 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 2/3 \end{array}\right)$$

Ich wende den aus der Vorlesung bekannten Algorithmus an:

Vorzeichenwechsel

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{7} & -\frac{5}{7} \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & \frac{2}{3} \end{array}\right)$$

Zeilen einfügen

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{7} & -\frac{5}{7} \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Sei $\underline{a}_1 := \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\underline{a}_2 := \begin{pmatrix} -\frac{1}{7} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\underline{\tilde{b}} := \begin{pmatrix} -\frac{5}{7} \\ 3 \\ \frac{2}{3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\mathcal{L}(A)$ hat Basis $(\underline{a}_1, \underline{a}_2)$.

$$\mathcal{L}(A|\underline{b}) = \begin{cases} \underline{\tilde{b}} + \langle \underline{a}_1, \underline{a}_2 \rangle & \text{falls } t = \frac{2}{3} \\ \emptyset & \text{sonst.} \end{cases}$$

Aufgabe 2

(a) 3,5P

<u>B' ist Basis von $U = \mathbb{R}^3$</u>, da es die Standardbasis ist. (0,5)

<u>B ist Basis von $U = \mathbb{R}^3$:</u> Es genügt, B durch Zeilentransformationen auf Einheitsmatrix zu reduzieren. Hierbei invertieren wir B sofort:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 10 & -5 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \ldots \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 5 & 0 \end{array}\right)$$

Also ist B linear unabh., also eine Basis. (1)

<u>C ist Basis von V:</u> Zu zeigen ist, dass C lin. unabh. ist und V aufspannt.

- <u>C ist lin. unabh.:</u> Seien $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ mit
$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 4 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0.$$

- <u>$\langle C \rangle = V$:</u> "$\subseteq$": $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in V$, da $2 = 4 \cdot 0 + 2 \cdot 1$.
$\begin{pmatrix} 4 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \in V$, da $4 = 4 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot 1$.

  Da V ein UVR von $\mathbb{R}^3$ ist, folgt $\langle C \rangle \subseteq V$.

  "$\supseteq$": Sei $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in V$. Dann gilt $x = 4y + 2z$,

  also $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4y + 2z \\ y \\ z \end{pmatrix} = z \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y \cdot \left(2 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \in \langle C \rangle$ (1)

<u>C' ist Basis von V:</u> [Dies kann analog zum vorherigen Fall gezeigt werden.] (1)

[...]

(b) Es gilt

6,5P

$${}_{C'}M_{B'}(f) = L_{C'} \cdot C \cdot {}_{C}M_{B}(f) \cdot L_B \cdot B', \qquad (*) \quad \leftarrow (0{,}5)$$

wobei B, B', C, C' als Matrizen aufgefasst werden und $L_B, L_{C'}$ Linksinverse von B, C' sind.

Mit dem üblichen Verfahren können $L_B, L_{C'}$ berechnet werden:

(3) L_B : siehe (a) (L_B ist eindeutig!)

(2) $L_{C'} \overset{[\ldots]}{=} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (zum Beispiel; $L_{C'}$ ist nicht eindeutig!)

Damit erhält man nach $(*)$

$${}_{C'}M_{B'}(f) \overset{[\ldots]}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(1,5)

Natürlich müssen die hier mit [...] markierten Rechenschritte ausnotiert werden, um die entsprechenden Punkte zu erhalten.

Aufgabe 3

(1) Seien A, B Mengen. Eine **Abbildung** $f\colon A \to B$ ist eine Vorschrift, die

■ jedem $a \in A$ genau ein Element $f(a) \in B$ zuordnet.

☐ jedem $a \in A$ mindestens ein Element $f(a) \in B$ zuordnet.

☐ jedem $b \in B$ ein Element $a \in A$ mit $f(a) = b$ zuordnet.

(2) Eine Relation $\sim$ auf einer Menge X ist **transitiv**, wenn für alle $x, y, z \in X$ gilt:

☐ $(x \sim y$ und $y \sim x) \Rightarrow x = y$

☐ $(x_1 \sim y_1$ und $x_2 \sim y_2) \Rightarrow x_1 + y_1 \sim x_2 + y_2$

■ $(x \sim y$ und $y \sim z) \Rightarrow x \sim z$

(3) Die folgenden Abbildungen sind **wohldefiniert**:

☐ $\begin{aligned} \mathbb{Z} \times \mathbb{N} &\to \mathbb{N} \\ (a, b) &\mapsto a + b \end{aligned}$

☐ $\begin{aligned} \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} &\to \mathbb{Z} \\ [n] &\mapsto (-1)^n \end{aligned}$

■ $\begin{aligned} \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}) &\to \mathbb{Q} \\ (a, b) &\mapsto \frac{a}{b} \end{aligned}$

(4) Eine Abbildung $f\colon A \to B$ zwischen den Mengen A und B nennen wir **bijektiv**, wenn gilt:

■ Zu jedem $b \in B$ existiert genau ein $a \in A$ mit $f(a) = b$.

☐ Zu jedem $a \in A$ existiert genau ein $b \in B$ mit $f(a) = b$.

☐ Die Mengen A und B haben genau gleich viele Elemente.

(5) Seien X, Y, Z Mengen. Für die Komposition $X \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{f} Z$ der Abbildungen $X \xrightarrow{g} Y$ und $Y \xrightarrow{f} Z$ gilt:

■ Sind g und f injektiv, so ist auch $f \circ g$ injektiv.

☐ Ist g injektiv und f surjektiv, so ist $f \circ g$ bijektiv.

■ Ist $f \circ g$ bijektiv, so ist g injektiv.

(6) Bekanntlich ist eine Gruppe $(G, *)$ **abelsch**, wenn die Verknüpfung $*$ kommutativ ist. Die folgenden Gruppen sind abelsch:

■ $(\mathbb{Z}, +)$

■ $\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$

☐ $(\mathbb{S}_3, \circ)$ (symmetrische Gruppe die dreistelligen Permutationen)

(7) Die folgenden Ringe sind Körper:

■ $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$

☐ $\mathbb{R}[t]$ (Polynomring über $\mathbb{R}$ mit üblicher Addition und Multiplikation von Polynomen)

☐ $\mathrm{M}(2 \times 2; \mathbb{R})$ (Ring der reellen 2×2-Matrizen)

(8) In jedem **Körper** K gilt:

☐ Es gibt unendlich viele verschiedene Elemente in K.

■ Zu jedem $\alpha \in K \setminus \{0\}$ existiert ein $\beta \in K$ mit $\alpha \cdot \beta = 1$.

☐ Zu jedem $\alpha \in K$ existiert ein $\beta \in K$ mit $\beta^2 = \alpha$.

Aufgabe 4

(1) Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

☐ Wir können die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ auffassen als Vektorraum über den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$. (Konvention: $0 \in \mathbb{N}$)

☐ Wir können die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ auffassen als Vektorraum über $\mathbb{Z}$.

■ Wir können die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ auffassen als Vektorraum über den rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$.

(2) Zwei Vektoren $\mathbf{v}_1$ und $\mathbf{v}_2$ in einem Vektorraum sind genau dann **linear unabhängig**, wenn gilt:

■ Für $\alpha_1, \alpha_2 \in K$ folgt aus $\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$ bereits $\alpha_1 = 0$ und $\alpha_2 = 0$.

☐ Für $\alpha_1, \alpha_2 \in K$ folgt aus $\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$ bereits $\alpha_1 = 0$ oder $\alpha_2 = 0$.

■ $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$ und $\mathbf{v}_2 \neq \mathbf{0}$ und es gibt kein $\alpha \in K$ mit $\mathbf{v}_1 = \alpha \cdot \mathbf{v}_2$.

(3) Der Nullvektorraum $\{\mathbf{0}\}$ über $\mathbb{R}$

☐ besitzt keine Basis.

■ besitzt als Basis die leere Familie.

☐ besitzt als Basis die Familie, die nur aus dem Nullvektor $\mathbf{0}$ besteht.

(4) Sei V ein Vektorraum über K. Eine Familie von Vektoren $\mathcal{B} := (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ aus V bildet genau dann eine **Basis** von V, wenn gilt:

■ $\mathcal{B}$ ist ein Erzeugendensystem von V und $\dim(V) = 3$.

■ Zu jedem Vektor $\mathbf{v} \in V$ existiert genau ein Tripel $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in K^3$, sodass gilt: $\mathbf{v} = \alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \alpha_3\mathbf{v}_3$.

☐ $\mathcal{B}$ ist ein Erzeugendensystem von V, und $\mathbf{v}_i \neq 0$ für $i \in \{1, 2, 3\}$.

(5) Die folgenden Matrizen $A \in \mathrm{M}(2 \times 2; \mathbb{Z}/5\mathbb{Z})$ sind invertierbar:
Achtung: Koeffizienten in $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$

■ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

(6) Eine quadratische Matrix $A \in \mathrm{M}(n \times n; K)$ ist genau dann invertierbar, wenn gilt:

■ $\mathrm{rang}(A) = n$.

☐ $\det(A) = 0$.

■ Die Zeilen von A sind linear unabhängig.

(7) Eine quadratische Matrix $A \in \mathrm{M}(n \times n; \mathbb{R})$ vom Rang $\mathrm{rang}(A) < n$

■ besitzt 0 als Eigenwert.

☐ besitzt keine Eigenwerte.

☐ besitzt höchstens $n - 1$ verschiedene Eigenwerte.

Aufgabe 5

(a) <u>Beh.:</u> $\{f_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ ist linear unabhängig.

5P

<u>Beweis:</u> Seien $\lambda_{n_1}, \dots, \lambda_{n_k} \in \mathbb{R}$ mit

$$\lambda_{n_1} f_{n_1} + \dots + \lambda_{n_k} f_{n_k} = 0 \quad (*)$$

OBdA sei $n_1 < n_2 < \dots < n_k$. Dann folgt aus $(*)$

$$\lambda_{n_1} \cdot \underbrace{f_{n_1}(n_1)}_{=1} + \lambda_{n_2} \cdot \underbrace{f_{n_2}(n_1)}_{=0} + \dots + \lambda_{n_k} \cdot \underbrace{f_{n_k}(n_1)}_{=0} = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_{n_1} = 0.$$

Also gilt $\lambda_{n_2} f_{n_2} + \dots + \lambda_{n_k} f_{n_k} = 0$.

Per Induktion über k folgt $\lambda_{n_1} = \lambda_{n_2} = \dots = \lambda_{n_k} = 0$. $\square$

(b) <u>Beh.:</u> $\{f_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ ist kein Erzeugendensystem von $\mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

5P

<u>Beweis 1:</u> Jede Funktion, die als Linearkombination der f_n geschrieben werden kann, ist auf dem Intervall $(0,1)$ konstant. Aber offenbar gibt es Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die auf $(0,1)$ nicht konstant sind. $\square$

<u>Beweis 2:</u> Wenn $f \in \langle \{f_n \mid n \in \mathbb{Z}\} \rangle$, dann gilt $f(x) = 0 \;\; \forall x \ll 0$. Also ist z.B. die Funktion $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 1$ nicht in $\langle \{f_n \mid n \in \mathbb{Z}\} \rangle$. $\square$

Aufgabe 6

4 (a) <u>~ ist reflexiv:</u> Sei $A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(m\times n)$. Dann ist

$$A = E_m^{-1} A E_n \quad , \quad \text{also gilt } A \sim A.$$

<u>~ ist symmetrisch:</u> Sei $A \sim A'$. Dann gibt es invertierbare Matrizen $S \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(m\times m)$, $T \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(n\times n)$, so dass

$$A' = S^{-1} A T$$

$$\Rightarrow (S^{-1})^{-1} A' (T^{-1}) = A \quad \Rightarrow \quad A' \sim A.$$

<u>~ ist transitiv:</u> Seien $A \sim A'$ und $A' \sim A''$. Dann existieren invertierbare $S, S' \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(m\times n)$, $T, T' \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(n\times n)$ mit

$$A' = S^{-1} A T \quad \text{und} \quad A'' = (S')^{-1} A' T'$$

$$\Rightarrow A'' = (S S')^{-1} A \,(T T') \quad \Rightarrow \quad A \sim A''.$$

6 (b) Folgende Tatsachen sind aus der Vorlesung bekannt:

(+) [Sei $A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(m\times n)$ und seien $T \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(n\times n)$, $S \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(m\times m)$ invertierbar. Dann gilt $\mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}(SAT)$. Außerdem existieren invertierbare $S \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(m\times m)$ und $T \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(n\times n)$ mit

$$S^{-1} A T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & & & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & & & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & & & \\ & & & 1 & 0 \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad (*)$$

<u>Behauptung:</u> Es gibt insgesamt $1 + \min\{m,n\}$ Äquivalenzklassen und die Matrizen der Form $(*)$ bilden ein vollst. Repräsentantensystem.

<u>Beweis:</u> Der Satz $(+)$ impliziert, dass jede $(m\times n)$-Matrix äquivalent zu einer Matrix der Form $(*)$ ist. Außerdem haben nach $(+)$ äquivalente Matrizen denselben Rang; folglich sind zwei verschiedene $(m\times n)$ Matrizen der Form $\begin{pmatrix} E_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (also $*$) nicht äquivalent, da sie unterschiedlichen Rang haben. Folglich bilden die Matrizen $\begin{pmatrix} E_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ein vollst. Rep.system der Äquivalenzklassen. Nun sieht man, dass es genau $1 + \min\{m,n\}$ dieser Matrizen gibt, nämlich

$$\begin{pmatrix} E_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} E_{\min\{m,n\}} \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \square$$